مفهوم المتحول الحر والمتحول المقيد

المتحول المقيد : هو المتحول الذي يقع ضمن مدى(*scope*) مكممه ، ويمكن استخدام الأقواس لتغيير المدى ، وإلّا فهو أصغر تعبير ممكن .

توضيح :

في الاسنادية $\forall x\, p(x) \wedge q(x)$ مدى المكمم $\forall$ هو $p(x)$ $\qquad scope\ of\ \forall =\ p(x)$

أما إذا كان $\forall x\big(\, p(x) \wedge q(x)\big)$ فإن مدى المكمم $\forall$ هو $p(x) \wedge q(x)$ $\qquad scope\ of\ \forall =\ p(x) \wedge q(x)$

إذا لم يكن المتحول مقيداً ندعوه **"متحول حر"** ، ويمكن أن يكون المتحول **حراً ومقيداً** في آنٍ معاً.

أمثلة:

$$\forall x\, \exists y\, (x \le y) \Longrightarrow (y + z = 5)$$

إنَّ x يقع ضمن مكممه ، إذاً x متحول مقيد . و y يقع ضمن مكممه تارةً وتارةً أخرى خارج مكممه إذاً y متحول حر ومقيد ،أما z فهو حر .

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x + y > 6) \Longrightarrow (y \le 7)$$

إنَّ x يقع ضمن مكممه ، إذاً x متحول مقيد . و y يقع ضمن مكممه تارةً وتارةً أخرى خارج مكممه إذاً y متحول حر ومقيد ،أما z فهو مقيد .

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big((x + y \ge 2) \Longrightarrow (y \le z)\big)$$

إنَّ كلاً من x و y و z يقع ضمن مكممه ، إذاً المتحولات x, y, z مقيدة جميعها .

$$\forall x\, \exists z\, \big((x \Longrightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow z)\big) \Leftrightarrow \exists x\, \big((x \wedge y) \Longrightarrow z\big)$$

إنَّ x مقيد في جميع الأماكن فهو مقيد ،و y حر في جميع الأماكن فهو حر ، أما z يقع ضمن مكممه تارةً وتارةً أخرى خارج مكممه إذاً zمتحول حر ومقيد.

$$\forall x\, (x + y \le 1) \Longrightarrow (x + y + z \le 4)$$

إنَّ x مقيد وحر ، و y, z متحولات حرة.

ملاحظات :

١- يمكن استبدال أي متحول حر بأي متحول آخر ، ولا يمكن استبداله بمتحول مقيد بنفس الاسنادية .

فمثلاً: $\forall x\, \exists y\, (x + y \le 2) \Longrightarrow (z < 5)$ يمكن استبدال المتحول z بأي متحول آخر $s, t, u, v, \dots$ عدا x أو y .



٢- ترتيب المكممات من نفس النوع لا يهم ، أما إذا كانوا من أنواع مختلفة فالترتيب مهم جداً. أي:

$$\forall x\ \forall y\ p(x,y)\ \equiv \forall y\ \forall x\ p(x,y)$$
$$\exists x\ \exists y\ p(x,y)\ \equiv \exists y\ \exists x\ p(x,y)$$

$$\forall x\ \exists y\ p(x,y)\ \not\equiv \exists y\ \forall x\ p(x,y)$$
$$\forall x\ \exists y\ p(x,y)\ \not\equiv \exists x\ \forall y\ p(x,y)$$

مثال: لتكن U مجموعة الأصدقاء ، $U = set\ of\ friend\ people$ والاسنادية $p(x,y)$ تعني أن x هو صديق y ، $p(x,y) = x\ is\ friend\ to\ y$

عندئذٍ $\forall x\ \exists y\ p(x,y)\ \not\equiv \exists y\ \forall x\ p(x,y)$

وذلك لأن $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ تعني أنه أيا كان الشخص x فإنه يوجد y بحيث يكون x هو صديق y. (أي كل شخص يوجد له صديق) أما $\exists y\ \forall x\ p(x,y)$ فتعني أنه يوجد شخص y بحيث يكون صديق للكل .

مسألة: بفرض لدينا

$H_x: x\ is\ a\ human$ يمكن ترميزها أيضاً ($H(x): is\ a\ human$)

$C_x: x\ is\ a\ car$

$T_x: x\ is\ a\ truck$

$D_{xy}: x\ drive\ y$

$I_{xy}: x\ is\ identical\ to\ y$

أكتب الاسناديات التالية :

1. *No human is a car* ولا إنسان هو سيارة
2. *No car is a truck* ولا سيارة هي شاحنة
3. *Human exists* الانسان موجود
4. *Cars exists* السيارات موجودة
5. *Only human drive* فقط الانسان يقود
6. *Only car and truck are driven* السيارات والشاحنات ممكن أن تقاد
7. *Everybody drive a car or a truck* كل شخص يقود إما سيارة أو شاحنة
8. *Some people drive both* بعض الأشخاص يقودوا كلا النوعين (سيارات وشاحنات)
9. *Some people don't drive either* بعض الأشخاص لا يقودوا لا سيارات ولا شاحنات
10. *No body drives both* ولا شخص يقود كلا النوعين
11. *Every car has at most one driver* كل سيارة لها على الأكثر سائق واحد
12. *Every truck has exactly two driver* كل شاحنة لها على الأقل سائقان اثنان
13. *Everybody drives exactly one vehicle* كل شخص يقود مركبة واحدة



الحل:

1. *No human is a car* : $\neg\exists x(H_x \wedge C_x)$ أو $\forall x(H_x \Rightarrow \neg C_x)$
2. *No car is a truck* : $\neg\exists x(C_x \wedge T_x)$ أو $\forall x(C_x \Rightarrow \neg T_x)$
3. *Human exists* : $\exists x\, H_x$
4. *Cars exists* : $\exists x\, C_x$
5. *Only human drive* : $\forall x\left(\left(\exists y\, D_{xy}\right) \Rightarrow H_x\right)$

إذا وجد x بحيث يقود y ، فإن x هو إنسان.

6. *Only car and truck are driven* : $\forall x\left(\left(\exists y\, D_{yx}\right) \Rightarrow \left(C_y \vee T_y\right)\right)$

الرمز D_{yx} نقصد به أن y يقاد بواسطة x ، والجملة تعني أنه إذا وجد شيء يقاد فلابد أن يكون إما سيارة أو شاحنة .

7. *Everybody drive a car or a truck* : $\forall x\left(H_x \Rightarrow \exists y\left(D_{xy} \wedge \left(C_y \vee T_y\right)\right)\right)$

من أجل كل x ، إذا كان x إنساناً فإنه يوجد شيء يقوده وهذا الشيء إما سيارة أو شاحنة

8. *Some people drive both* : $\exists x\left(H_x \wedge \exists y \exists z\left(\left(D_{xy} \wedge C_y\right) \wedge \left(D_{xz} \wedge T_z\right)\right)\right)$

يوجد x بحيث x إنسان ويوجد y و z بحيث y سيارة والشخص x يقودها وz شاحنة والشخص x نفسه يقودها.

9. *Some people don't drive either* : $\exists x\left(H_x \wedge \neg\exists y\left(D_{xy} \wedge \left(C_y \vee T_y\right)\right)\right)$

يوجد x بحيث x إنسان ولا يوجد شيء(لا سيارة ولا شاحنة) يقوده الشخص x

10. *No body drives both* هذه ماهي إلا نفي للجملة الثامنة

الجمل الـ *11 , 12 ,13* تُركت للطالب.

أعطيت هذه المسألة في المحاضرة الخامسة نصاً ، وتمَّ حلها في المحاضرة السابعة ، وهنا تمَّ كتابتها نصاً وحلاً في هذه المحاضرة.

.: انتهت المحاضرة السابعة :.